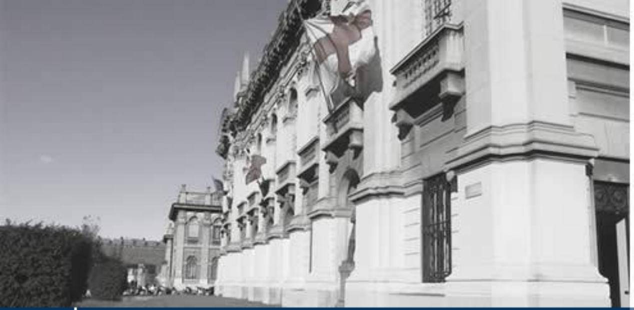

POLITECNICO DI MILANO

    

Corso di Intelligenza Artificiale 2011/12

Introduzione alla logica

Viola Schiaffonati – Dipartimento di Elettronica e Informazione

Sommario

- Logica proposizionale (logica di Boole)
- Logica del primo ordine (logica predicativa o FOL)
- Sintassi e semantica
  - Rappresentazione della conoscenza
  - Ragionamento per manipolare la conoscenza

Logica moderna: tappe salienti

- Gottfried Leibniz (XVII sec.): *Lingua Rationalis* (*characteristica universalis* + *calculus ratiocinator*)
- George Boole (1954): algebrizzazione della logica
- Gottlob Frege (1879): sistema formale, quantificazione, prova

Sintassi

- Sintassi: regole per specificare le formule “ben formate” del linguaggio logico
- Esempio
  - $x + y = 4$
  - $x2y+ =$

Semantica

- Semantica: modo per attribuire significato alle formule
  - Definisce la verità delle formule rispetto a un mondo possibile
- Esempio
  - $x + y = 4$ è vera in un mondo in cui $x = 2$ e $y = 2$
- Un mondo possibile è un modello
  - m è un modello di α indica che α è vera in m
  - Modello come astrazione matematica che fissa il valore di verità di ogni formula

Ragionamento logico: implicazione

- Implicazione logica ($\alpha \models \beta$)
  - Una formula segue logicamente dall'altra
  - ($\alpha \models \beta$) sse in ogni modello in cui è vera α, è vera anche β (se α è vera, allora anche β deve essere vera)
- Esempio
  - $x + y = 4$ implica $4 = x + y$
  - In ogni modello in cui $x + y = 4$ è vero che $4 = x + y$

Ragionamento logico: inferenza

- Inferenza logica ($KB \vdash_i \alpha$)
  - La definizione di implicazione logica è applicata per derivare conclusioni, per eseguire inferenze logiche
- Esempio
  - Insieme di tutte le conseguenze di KB = pagliaio
  - α = ago
  - Implicazione: affermare che l'ago si trova nel pagliaio
  - Inferenza: trovare l'ago nel pagliaio

Correttezza

- Un’inferenza è corretta se e solo se la conclusione è un’implicazione logica delle premesse
  - Un algoritmo di inferenza è corretto quando deriva solo le formule implicate
  - La correttezza preserva la verità
- Procedura di inferenza non corretta
  - Annunciare la scoperta di aghi inesistenti

Completezza

- Un’inferenza è completa se e solo se ogni formula implicata può essere derivata
  - Un algoritmo di inferenza è completo quando deriva tutte le formule implicate
- Procedura di inferenza completa
  - Decidere se l’ago è contenuto nel pagliaio oppure no

Il calcolo proposizionale

- Tipo particolare di logica
- Logica molto semplice
  - Sintassi
  - Semantica
  - Implicazione

Sintassi

- La sintassi definisce le formule accettabili
- Formule atomiche
  - Consistono di un singolo simbolo proposizionale (*P*, *Q*, *R*)
  - Ogni simbolo rappresenta una proposizione che può essere vera (*True*) o falsa (*False*)
- Formule complesse
  - Formate da formule atomiche e connettivi logici
  - $\neg$ (negazione), $\wedge$ (congiunzione), $\vee$ (disgiunzione), $\rightarrow$ (implicazione), $\leftrightarrow$ (bicondizionale o equivalenza)

Semantica

- La semantica comprende le regole per determinare il valore di verità di una formula (per un particolare modello)
- Un modello fissa il valore di verità (*true* o *false*) di ogni simbolo proposizionale
- Come calcolare il valore di verità delle formule atomiche e di quelle costruite con i connettivi (a partire da un modello)?
- Tavole di verità

Tavole di verità

- Calcolo della verità di formule più complesse ridotto a quello di formule più semplici
  - Tutte le formule costruite da formule atomiche e connettivi
- I valori di verità di una formula complessa sono specificati per ogni possibile configurazione dei suoi componenti
- Il valore di verità di ogni formula *s* può essere calcolato per ogni modello *m* con un processo di valutazione ricorsiva

Negazione

- La negazione è il connettivo che inverte il valore di verità di una proposizione
- E' un connettivo a un argomento (si applica a una singola proposizione)

P	$\neg P$
V	F
F	V

Congiunzione

- La congiunzione di due proposizioni P e Q è la proposizione che è vera se entrambe le proposizioni P e Q sono vere e falsa in tutti gli altri casi
- È un connettivo a due argomenti

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione

- La disgiunzione (inclusiva) di due proposizioni P e Q è la proposizione che è vera se almeno una delle due proposizioni P e Q è vera e falsa se entrambe sono false
- È un connettivo a due argomenti

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condizionale (1)

- Il condizionale di due proposizioni P e Q è il connettivo definito dalla seguente tavola
- È un connettivo a due argomenti

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Attenzione!

- Tavola di verità del condizionale non corrisponde al significato intuitivo di “P implica Q”
- Nessuna relazione di causa ed effetto nel calcolo proposizionale
  - “5 è dispari implica che Tokyo è la capitale del Giappone” è una formula vera del calcolo proposizionale
- Ogni implicazione è vera se il suo antecedente è falso
  - “5 è pari implica che Sam è intelligente” è una formula vera
  - $P \rightarrow Q$ significa “Se P è vero, allora lo è anche Q. In caso contrario non faccio nessuna asserzione”
  - Implicazione falsa solo se P è vera ma Q falsa

Condizionale (2)

- Il condizionale $P \rightarrow Q$ è logicamente equivalente a $\neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Bicondizionale (1)

- Il bicondizionale di due proposizioni *P* e *Q* è il connettivo definito dalla seguente tavola
- È un connettivo a due argomenti

P	Q	$(P \leftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Bicondizionale (2)

- Il bicondizionale $P \leftrightarrow Q$ è logicamente equivalente a $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Inferenza

- Scopo dell'inferenza logica decidere se $KB \models \alpha$
- Verificare che α sia vera in ogni modello in cui *KB* lo è
- Modelli (calcolo proposizionale) rappresentati da un assegnamento di valori *true* o *false* a ogni simbolo proposizionale

Equivalenza logica

- Due formule α e β sono logicamente equivalenti se sono vere nello stesso insieme di modelli
- $\alpha \equiv \beta$ sse $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$
- $\alpha \leftrightarrow \beta$
- Equivalenze logiche standard (commutatività $\wedge$, commutatività $\vee$, associatività $\wedge$, associatività $\vee$, …)

Validità

- Una formula è valida se è vera in tutti i modelli
- Le formule valide sono tautologie e sono necessariamente vere
- Teorema di deduzione
  - Date due formule qualsiasi α e β, $\alpha \models \beta$ se e solo se la formula $\alpha \rightarrow \beta$ è valida

Soddisfacibilità

- Una formula è soddisfacibile se è vera in qualche modello
- Se una formula α è vera in un modello *m*
  - *m* soddisfa α
  - *m* è un modello di α

Validità e soddisfacibilità

- Due concetti strettamente connessi
- α è valida sse $\neg\alpha$ è insoddisfacibile
- α è soddisfacibile sse $\neg\alpha$ non è valida

Schemi di ragionamento

- Schemi standard di inferenza applicati per derivare catene di deduzioni
- Regole di inferenza
  - Modus Ponens $$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$$
  - Eliminazione della congiunzione $$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$
  - Introduzione della congiunzione $$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$$
  - Introduzione della disgiunzione $$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$
- Dimostrazione
  - Sequenza di applicazioni di regole di inferenza

Calcolo proposizionale

- Sufficientemente espressivo
  - Negazione e disgiunzione consentono la gestione di informazione parziale
- Dichiarativo
  - Conoscenza separata dall'inferenza (indipendente dal dominio)
  - Semantica basata su relazione di verità che collega formule ai mondi possibili
- Composizionale
  - Significato di una formula complessa funzione del significato delle sue parti

Dal calcolo proposizionale alla logica del primo ordine

- Logica proposizionale
  - Non sufficientemente espressiva per descrivere concisamente un ambiente con molti oggetti
- Logica del primo ordine
  - Logica proposizionale (semantica dichiarativa e composizionale, indipendente dal contesto e non ambigua)
  - Metodi di rappresentazione del linguaggio naturale

Caratteristiche

- Sufficientemente espressiva, ma concisa
- Sintassi
  - Oggetti (persone, cavalli, numeri, teorie, …)
  - Relazioni
    - Proprietà: relazioni unarie (rosso, tondo, primo, falso, …)
    - Funzioni: relazioni n-arie (padre di, migliore amico, …)
- Oggetti e relazioni rendono possibile esprimere regole generali o leggi

Un confronto

- Logica proposizionale
  - Ogni fatto può essere in uno di due possibili stati: *true* o *false*
- Logica del primo ordine
  - Il mondo consiste di oggetti legati da relazioni che possono o meno essere verificate

Impegno ontologico

- Ipotesi circa la natura della realtà nei due linguaggi
- Logica proposizionale
  - I fatti nel mondo sono veri oppure no
- Logica del primo ordine
  - Il mondo consiste di oggetti legati da relazioni che possono o meno essere verificate

Sintassi

- Simboli descrittivi
  - Simboli di costante (*a*, *b*, *c*, ...),
  - Simboli di predicato (*P*, *Q*, *R*)
  - Termini: simboli utilizzati per fare riferimento a oggetti
- Simboli logici
  - Connettivi logici ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
  - Quantificatori ($\forall$, $\exists$)
  - Variabili individuali (*x*, *y*, *z*)
  - Uguaglianza (=)
- Simboli strutturali
  - Parentesi ( )
  - Virgola ,

Formule

- Le formule atomiche sono capaci di asserire fatti
  - Composte da simboli di predicato seguiti da una lista di termini fra parentesi
  - *Ama* (*Roberto*, *Elisa*)
- Le formule complesse sono costruite a partire da formule atomiche e connettivi logici e/o quantificatori
  - $\neg$*Ama* (*Elisa*, *Roberto*)

Quantificatori

- Per esprimere caratteristiche di intere collezioni di oggetti senza doverli enumerare uno per uno
- Quantificazione universale $\forall$
  - $\forall x\ Re(x) \rightarrow Persona(x)$
  - $\forall x\ P$ (P vale per ogni oggetto x)
- Quantificazione esistenziale $\exists$
  - $\exists x\ Corona(x) \wedge SullaTesta(x, Giovanni)$
  - $\exists x\ P$ (P è vera per almeno un oggetto x)

Alcune definizioni

- Variabili vincolate: le cui occorrenze fanno parte di un quantificatore o sono contenute nell'ambito di un quantificatore (*libere* negli altri casi)
- Formule chiuse: se ogni occorrenza delle variabili nella formula è vincolata (*aperte* in caso contrario)
- Una formula chiusa si dice anche frase o enunciato
- Un *predicato* è una proprietà che un determinato individuo può possedere o meno, o una relazione che può sussistere o non sussistere fra coppie, terne, ecc. di individui

Semantica

- Per determinare la verità delle formule, la semantica deve metterle in relazione con i modelli
  - Definire quando una formula φ è vera in un modello *M*
  - $M \models \varphi$
- Una formula non è né vera né falsa in sé ma solo relativamente a un'interpretazione
  - Specifica a quali oggetti e relazioni fanno riferimento i simboli di costante e predicato

Validità e verità

- Obiettivo della logica è stabilire se un ragionamento è valido
- La validità di un ragionamento si riduce alla relazione di implicazione logica fra formule
- Il concetto di implicazione logica è riducibile al concetto di verità di una formula
- Per stabilire se un ragionamento è valido bisogna definire le condizioni di verità delle formule che lo compongono

Modello

- Struttura matematica che modella un frammento della realtà
- L’insieme degli oggetti di un modello è detto dominio (elementi del dominio)
- Il dominio serve da base per l’interpretazione dei simboli descrittivi
  - Estensione del predicato *ext*(P)
  - Referente della costante *ref*(C)
- Ogni interpretazione che rende vere tutte le formule della teoria è un modello della teoria (M=<D, ext, ref>)

Interpretazione

- La verità di una formula in un modello dipende
  - Dall'interpretazione dei simboli descrittivi (costanti e relazioni) nel dominio
    - *den*(t) = *ref* (t) se t è una costante
  - Dall'assegnamento di individui alle variabili
    - *den*(t) = *val* (t) se t è una variabile

Classificazione semantica delle formule

- Valida
  - Se per ogni modello *M* e per *ogni* assegnamento *val* si ha *M*, *val* $\models \varphi$
- Soddisfacibile
  - Se per qualche modello *M* e per qualche assegnamento *val* si ha *M*, *val* $\models \varphi$
- Invalida
  - Se non è valida
- Insoddisfacibile
  - Se non è soddisfacibile
- Contingente
  - Se non è né valida né insoddisfacibile